

- Preface
- 线性规划(Linear Programming)
 - 单纯形法(Simplex Method)
 - 对偶单纯形法(Dual Simplex Method)
 - 运输问题(Transportation Problem)
 - 目标规划(Linear Goal Programming)
 - 整数线性规划(Integer Linear Programming)
 - 分支定界法(Branch and Bound Method)
 - 割平面法(Cutting Plane Method)
 - 0-1型整数规划
 - 指派问题(Assignment Problem)
- 排队论(Queueing Theory)
 - 单服务台负指数分布排队系统
 - 多服务台负指数分布排队系统
 - M/G/1模型
 - 系统最优化
- 存储论(Inventory)
 - 确定性存储模型
 - 随机性存储模型
- 博弈论(Game Theory)
 - 最优纯策略
 - 最优混合策略

Preface

Last Updated 6/3/2022 完善了随机性存储模型及博弈论

这是我整理的CS401202的课程速览，参考课本是[运筹学第四版](#)，主要是觉得这门课内容有点多，想做个类似大纲的东西，也方便掌握这门课。markdown文档在[有道云笔记](#)，PDF版本可以[关注我的主页](#)，有任何建议可以[联系我](#)。

线性规划(Linear Programming)

单纯形法(Simplex Method)

代数单纯形法

单纯形表

处理人工变量

- **大M法**(不便于计算机求解)
- 两阶段法(便于计算机求解)

对偶单纯形法(Dual Simplex Method)

对偶理论(Duality theory)

- 原问题与对偶问题的关系
- 对偶问题的性质
- 对偶单纯形法

灵敏度分析(Sensitivity analysis)(需借助单纯形矩阵)

- 资源数量 b_i 的变化
- 价值系数 c_j 的变化(分类讨论)
- 系数列向量 $a_{i,j}$ 发生变化
 - 增加一个变量(增加一列)
 - 增加一个约束(增加一行)
 - 非基变量系数 $a_{i,j}$ 改变
 - 基变量系数 $a_{i,j}$ 改变

参数线性规划

- 参数c的变化
- 参数b的变化

本质上都是观察参数变化后，原最优解是否为可行解，如果是可行解，是否仍为最优解。

运输问题(Transportation Problem)

寻找初始基可行解

- 西北角法
- 最小元素法
- 伏格尔法(Vogel Method)

检验是否为最优解

- 闭回路法
- 位势法

调整可行解

- 闭回路法

产销不平衡

- 产大于销=>虚拟销地
- 销大于产=>虚拟产地

noting: 碰到产销不平衡问题最好使用伏格尔法, 而非最小元素法。

warning: 运输问题求解的是最小值, 求最大值需要做转换。如: $a_{i,j} = const - a_{i,j}$

目标规划(Linear Goal Programming)

起因: 现实生活中往往没有最优解, 但是有满意解

引入概念:

- 正负偏差变量 d^+, d^-
- 绝对约束和目标约束
- 优先因子与权系数
- 目标规划的目标函数

图解法

单纯形法

整数线性规划(Integer Linear Programming)

分支定界法(Branch and Bound Method)

1. 寻找对应LP问题最优解
2. 寻找ILP问题可行解
3. 分支、定界、剪支
4. 重复3直至找到ILP问题最优解

割平面法(Cutting Plane Method)

0-1型整数规划

隐枚举法(Implicit Enumeration)

- 添加过滤条件
- 调整变量顺序(系数递增)

指派问题(Assignment Problem)

匈牙利算法

人数与任务数不均等问题:

- 虚拟任务和虚拟人

不可接受的配置问题

- 对应的效率设置为M

warning: 指派问题求的是最小值, 若求最大值, 令 $b_{ij} = M - c_{ij}$

排队论(Queueing Theory)

单服务台负指数分布排队系统

- M/M/1/∞/∞
- M/M/1/N/∞
- M/M/1/∞/m

多服务台负指数分布排队系统

- M/M/c/∞/∞
- M/M/c/N/∞
- M/M/c/∞/m

c个M/M/1模型与单个M/M/c模型比较

M/G/1模型

恒等式:

$$L_s = L_q + L_{se} \qquad W_s = W_q + E[T]$$

Little公式:

$$L_s = \lambda W_s \qquad L_q = \lambda W_q$$

P-K公式:

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{Var}[T]}{2(1 - \rho)}$$

系统最优化

- M/M/1模型中最优服务率 μ
- M/M/c模型中最优服务台数c

存储论(Inventory)

存储策略:

- t_0 循环策略
- (s,S)策略
- (t,s,S)混合策略

确定性存储模型

模型(t_0 为最佳周期, Q_0 为最佳生产批量):

1. 不允许缺货, 生产时间很短

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \quad Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}}$$

2. 不允许缺货, 生产需要一定时间

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3 P}{C_1 R}} \sqrt{\frac{P}{P-R}} \quad Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

3. 允许缺货(缺货需补足), 生产时间很短

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}} \quad Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

4. 允许缺货(缺货需补足), 生产需要一定时间

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \sqrt{\frac{P}{P-R}} \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}} \quad Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \sqrt{\frac{P}{P-R}} \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

这说明从理想到现实只需要打个折。

5. 价格有折扣的存储问题

随机性存储模型

- 需求是随机离散的(定期定量订货)

$$\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) < \frac{k}{k+h} \leq \sum_{r=0}^Q P(r)$$

- 需求是随机连续的(定期不定量订货)

$$Q = \max(0, Q^* - I)$$

where Q^* satisfies

$$F(Q^*) = \int_0^{Q^*} \phi(r) dr = \frac{C_2 - K}{C_1 + C_2}$$

其中 I 是本阶段的初始存储量, K 为元件单价

- **(s,S)型存储策略**
 - 需求是离散的
 - 需求是连续的

仅介绍离散情形, 连续情形只需将对应求和改为积分

1. 计算临界值 $N = \frac{C_2 - K}{C_1 + C_2}$
2. 选取使得不等式 $\sum_{r \leq S_i} P(r) \geq N$ 成立的 S_i 最小值作为 S
3. s 满足如下不等式, 取不大于 S 的最小值

$$Ks + \sum_{r \leq s} C_1(s - r)P(r) + \sum_{r > s} C_2(r - s)P(r) \leq C_3 + Ks + \sum_{r \leq S} C_1(S - r)P(r) + \sum_{r > S} C_2(r - S)P(r)$$

理论上 s 很难确定, 但是在具体问题中总是不难计算, 可以先从最小需求量算起

- 需求和拖后时间都是随机离散的

博弈论(Game Theory)

矩阵对策(finite two-person zero-sum game)

- 存在鞍点 => 最优纯策略
 $G = \{S_1, S_2; A\}$
- 不存在鞍点 => 最优混合策略
 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$

最优纯策略

$$V_G = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*}$$

$a_{i^*j^*}$ 即为矩阵 A 的鞍点, 也称为对策的鞍点

最优混合策略

- **2 × 2 对策的公式法**
- 图解法 ($2 \times n$ or $m \times 2$)
- 迭代法
- 线性方程组法
 先假设存在非负解, 解等式组
 若不存在非负解, 请视情况修改等号为不等号, 解不等式组
- **线性规划方法**
 求解对偶线性规划问题
 (P): $\min z = \sum x \quad A^T x \geq 1 \quad x \geq 0$
 (D): $\max w = \sum y \quad Ay \leq 1 \quad y \geq 0$
 $V_G = 1/z = 1/w$

优超原则: 当局中人某个策略全面优于另一个策略时, 或者某几个策略的线性组合优于另一个策略, 可以缩小策略集, 具体表现为划去赢得矩阵的某一行, 或是划去赢得矩阵某一列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow A'' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

noting: 利用局中人的纯策略的优越关系可以降低求解最优解的难度，但是有可能会损失一些最优解，但是 V_G 的值是一样的

1. 不能减少计算量，但可以提高计算机求解的精度；可用于灵敏度分析 ↩